Άσκηση: Έστω $H=\langle f^3\rangle \le D_6$.
Να αποδείξετε ότι $D_6/H \cong D_3$.

ΛΥΣΗ

$D_6=\{e,f,f^2,f^3,f^4,f^5,g,fg,f^2g,f^3g,f^4g,f^5g\}$

$H=\langle f^3\rangle=\{e,f^3\}\le D_6$

Έτσι, από Θ. Lagrange: $[D_6:H]=|D_6/H|=\frac{|D_6|}{|H|}=6$ σύμπλοκα

Ας βρούμε τα δεξιά σύμπλοκα:

$eH=f^3H=H=\{e,f^3\}$, $fH=\{f,f^4\}$, $f^2=\{f^2,f^5\}$
$gH=\{g,\ gf^3=f^3g\}$, $fgH=\{fg,\ fgf^3=f^4g\}$,
$f^2gH=\{f^2g,\ f^2gf^3=f^5g\}$, ώστε να αποτελούν διαμέριση του D_6
Επίσης παρατηρούμε ότι αριστερά και δεξιά σύμπλοκα ταυτίζονται άρα $H\triangleleft D_6$.
Οι έξι διαφορετικές πλευρικές κλάσεις (ή σύμπλοκα) αποτελούν (εξ ορισμού της ομάδας πηλίκου) στοιχεία της D_6/H και έχουμε ως πράξη:
$(fH)\cdot(gH)=\{xy \mid x\in fH \text{ και } y\in gH\}=$
$=\{xy \mid x\in\{f,f^4\} \text{ και } y\in\{g,f^3g\}\}=$
$=\{fg,\ ff^3g=f^4g,\ f^4g,\ f^7g=fg\}=$
$=\{fg,f^4g\}=fgH$ (όπου το αναμέναμε από ορισμό)
Έτσι, γράφονται τα σύμπλοκα ως:
$eH,\ fH,\ (fH)^2,\ gH,\ (fH)(gH),\ (fH)^2\cdot(gH)$
και έπειτα ελέγχοντας τις ισότητες
$(fH)^3=f^3H=eH$, $(gH)^2=g^2H=eH$ και
$(gH)(fH)=gfH=f^2gH=(fH)^2(gH)$.
καταλήγουμε ότι $D_6/H\cong D_3$
όπου στην D_3 έχουμε τις αντίστοιχες σχέσεις
$f^3=e$, $g^2=e$ και $gf=f^2g$

Άσκηση: Έστω η υποομάδα H της A_4, με
$H = \{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$.
Να αποδείξετε ότι : $A_4/H \cong \mathbb{Z}_3$

ΛΥΣΗ

$|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$ και $|H| = 4 \overset{Lagrange}{\Longrightarrow} [A_4 : H] = |A_4/H| = 3$ σύμπλοκα

$eH = H$, $(1,2,3)H$, $(1,3,2)H$ όπου

$(1,2,3)H = \{(1,2,3), (1,2,3)(1,2)(3,4), (1,2,3)(1,3)(2,4), (1,2,3)(1,4)(2,3)\} =$

$= \{(1,2,3), (1,3,4), (2,4,3), (1,4,2)\}$

$(1,3,2)H = \{(1,3,2), (1,3,2)(1,2)(3,4), (1,3,2)(1,3)(2,4), (1,3,2)(1,4)(2,3)\} =$

$= \{(1,3,2), (2,3,4), (1,2,4), (1,4,3)\}$

Όπου $H \sqcup (1,2,3)H \sqcup (1,3,2)H = A_4$

Να πούμε ότι $H \trianglelefteq A_4$ ώστε να έχει νόημα η ομάδα:

$A_4/H = \{eH = H, (1,2,3)H, (1,3,2)H\}$

$|A_4/H| = |\mathbb{Z}_3| = 3$

Η $\mathbb{Z}_3$ έχει γεννήτορες το $\bar{1}$ και $\bar{2}$ (όπως πρώτοι με το 3)

και τα στοιχεία έχουν τάξεις:

$o(\bar{1}) = 3 = o(\bar{2})$

Αλλά, $((1,2,3)H)^3 = (1,2,3)^3 H = eH$ και

$((1,3,2)H)^3 = (1,3,2)^3 H = eH$

Δηλ. $o((1,2,3)H) = o((1,3,2)H) = 3$.

Άρα, ($\exists \varphi : A_4/H \to \mathbb{Z}_3$ 1-1 και επί)

μπορούμε να πούμε ότι $A_4/H \cong \mathbb{Z}_3$.